8ª Semana de Matemática e Educação Matemática Campus Bragança Paulista
6 a 10 de maio de 2019 - IFSP - Câmpus Bragança Paulista
ISSN 2527-1121

OS INFINITOS DE CANTOR: CONTEXTOS E CONTRIBUIÇÕES

Vinícius Fróes Raio[1], Glauco Aparecido de Campos[2]

[1] Aluno do curso de Licenciatura em Matemática, IFSP, *campus* Bragança Paulista, vinicius.raio@aluno.ifsp.edu.br.
[2]Professor do Instituto Federal de São Paulo, *campus* Bragança Paulista, glaucodecampos86@gmail.com.

RESUMO: O presente trabalho traz algumas considerações sobre a vida e a obra do matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), o qual realizou estudos em análise e teoria dos conjuntos, bem como em outras áreas da matemática. Este trabalho tem o objetivo de explicitar o valor histórico dos trabalhos de Cantor, e trará inicialmente um breve relato da vida deste estudioso, afim de contextualizar suas pesquisas,no período que vai desde sua infância e período colegial até sua vida adulta, tratando de suas relações acadêmicas e sua situação psicológica. Em seguida, serão apresentadas algumas contribuições de Cantor para a matemática, como a definição de infinitos enumeráveis e não enumeráveis e o conceito e propriedades dos números transfinitos.

Palavras-chave: História da matemática. Cantor. Infinito. Enumerabilidade de conjuntos. Teoria de conjuntos. Números transfinitos.

1. Introdução

O infinito é uma ideia complexa e em algum sentido, controversa, pois foi alvo de várias discussões em diferentes lugares e momentos da história da matemática. Este trabalho possui o intuito de abordar um pouco da vida e obra de um homem que dedicou-se ao estudo deste conceito, além de trazer uma contextualização a respeito dos temas trabalhados por ele, através de alguns trabalhos anteriores relacionados ao tema e de um breve comentário acerca do impacto causado por sua obra.Um homem que, de acordo com relato de Hilbert (1925), encontrou diversas objeções de outros estudiosos contra sua teoria de conjuntos.

Este texto está dividido em duas partes principais: a primeira parte trata-se de uma pequena biografia de Cantor e uma breve contextualização de seus trabalhos, sendo esta seção baseada principalmente nos trabalhos de Aczel (2003) e de O'Connor e Robertson (1998); e a segunda parte trará algumas de suas contribuições para a matemática.

Segundo Santos (2008), os trabalhos de Cantor foram revolucionários no contexto da matemática. Este trabalho não tem por objetivo corroborar com ou se opor a esta tese, mas sim, buscar a compreensão de parte dos trabalhos de Cantor e do contexto em que estes foram desenvolvidos.

2. Vida de Georg Cantor

2.1. Infância e Juventude

Georg Cantor nasceu no dia 03 de março de 1845, na cidade de São Petersburgo, Rússia. Foi o filho mais velho de Georg Waldemar Cantor, um homem dinamarquês que, mesmo sendo comerciante, sempre teve apreço pelas artes, assim como sua esposa russa, Maria Anna Bohm.A família Cantor viveu em São Petersburgo até 1856, onde Georg recebeu ensino particular até os onze anos, quando mudaram-se para a cidade de Frankfurt, na Alemanha, devido a complicações respiratórias do pai da família, considerando que Frankfurt tinha um clima mais brando em relação à grande cidade russa. Lá, o filho mais velho dos Cantor estudou em Darmstadt, até sua admissão em Zurique, em 1862 (ACZEL, 2003; O'CONNOR, ROBERTSON, 1998).

No período em que estudara em Darmstadt, Georg manteve contato com seu pai através de cartas, as quais ajudaram a norteá-lo no início de sua carreira como pesquisador e estudante. As cartas tinham um teor de incentivo e mostra de expectativas do pai para com Georg. Em Aczel (2003), encontra-se um trecho de uma delas, onde lê-se:

> [...] seu pai, ou melhor, seus pais e todas as outras pessoas da família, tanto na Rússia como na Alemanha, têm os olhos voltados para você como o mais velho, e esperam que você seja nada menos que um Theodor Schaeffer[1] e depois, se Deus quiser, quem sabe um astro brilhante no horizonte da ciência. (CANTOR, apud ACZEL, 2003, p.89)

As cartas do pai vinham incentivando-o em diversas áreas, principalmente a engenharia, mas foi matemática a escolhida por Georg para prosseguir seus estudos, sendo admitido no Instituto Politécnico de Zurique com boas notas, principalmente nas disciplinas exatas (ACZEL, 2003).

2.2. De Zurique a Halle

Após seus exames finais, Cantor começou seus estudos em matemática no Instituto Politécnico de Zurique por um curto período de tempo, pois conseguiu uma transferência para a Universidade de Berlim, uma das universidades com maior prestígio da Europa na época. Lá, estudou com os melhores professores da Europa, os quais foram fundamentais para o desenvolvimento do seu interesse pela teoria dos números, e, futuramente, a análise matemática, área na qual foram realizadas suas principais contribuições (ACZEL, 2003).

[1]Theodor Schaeffer foi professor de Cantor em Darmstadt, este tal que o pai de Cantor usava como modelo para o filho.

Após concluir seu doutorado em 1867, Cantor aceitou, dois anos depois, a posição de *privatdotzent*, na Universidade de Halle, sendo esta seu local de trabalho vitalício, mesmo que a contragosto, uma vez que ele tinha interesse em lecionar na instituição de Berlim, onde formara-se (ACZEL, 2003; O'CONNOR, ROBERTSON, 1998).

2.3. Perseguições e colapsos nervosos

No ano de 1870, Cantor ganhou renome no meio acadêmico de Halle, devido seu sucesso na "tentativa de mostrar a unicidade da representação de qualquer função representada por uma série trigonométrica" (SANTOS, 2008, p.110) . De acordo com O'Connor e Robertson (1998),

> Isto foi devido a Heine, um de seus colegas veteranos em Halle, que desafiou Cantor a provar o problema em aberto [...] Cantor resolveu o problema provando a singularidade da representação em abril de 1870. Ele publicou outros artigos entre 1870 e 1872, tratando de séries trigonométricas e todos estes mostram a influência do ensino de Weierstrass. (tradução nossa)

Posteriormente, em 1872, Cantor iniciou correspondências com o matemático Dedekind, autor que já trabalhava com a ideia de infinito, e que se baseou em pesquisas de Cantor em parte de seus trabalhos futuros, tornando-se seu parceiro nos estudos e na defesa do infinito atual.

De acordo com Santos (2008) e Aczel (2003), Cantor focou seus estudos na análise matemática, publicando seus estudos no ano de 1874, com o *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no *Mathematica Annalen*, provando a não enumerabilidade dos números reais. E foi durante o período de desenvolvimento desses trabalhos onde Cantor teve que lidar com as objeções de diversos estudiosos, sobretudo de Leopold Kronecker, aquele que viria a ser seu principal opositor, publicando críticas a suas pesquisas, usando sua influência para impedir que Cantor conseguisse se tornar professor em Berlim, e até mesmo tentando impedir que Cantor publicasse seus trabalhos.

Graças a essas intervenções de Kronecker, Cantor teve muita dificuldade de publicar seus resultados, já que o primeiro conseguiu fazer com que alguns estudiosos desenvolvessem certa antipatia pelo segundo. Mas Mittag-Leffler, o editor da revista *Acta Mathematica*, interessou-se pelos estudos de Cantor e publicou parte deles, sendo uma das poucas revistas a fazê-lo.

Em maio de 1884, Cantor sofreu seu primeiro colapso nervoso, enquanto trabalhava na hipótese do *Continuum*. Seu primeiro colapso durou um mês, porém infelizmente foi seguido de outros, que duraram por mais tempo, havendo a necessidade, inclusive, de hospitalização. Parte desses colapsos seguintes também acometeram Cantor após tentativas frustradas de desenvolver sua teoria do *Continuum* (ACZEL, 2003; O'CONNOR, ROBERTSON, 1998).

Alguns autores do ramo da psicologia, como relata Aczel (2003), afirmam que seus transtornos mentais, como mudanças de humor, depressão e até mesmo mania de perseguição teriam como uma das possíveis causas a relação de Cantor com seu pai, pois sugere-se que havia uma pressão muito grande sobre o desempenho acadêmico do filho, que veio a desencadear, futuramente, colapsos nervosos.

Após seu primeiro colapso, Cantor afastou-se do desenvolvimento da hipótese do *Continuum*, e passou a dedicar-se a outras atividades alheias à sua área, pois após esse evento traumático, Cantor supostamente passou a duvidar de suas habilidades como matemático (ACZEL, 2003).

Cantor aposentou-se em 1913 e morreu de ataque cardíaco, enquanto estava sob regime de internação na clínica onde fora atendido diversas vezes anteriormente, a *Halle Nervenklinik*, no dia 6 de janeiro de 1918 (ACZEL, 2003; O'CONNOR, ROBERTSON, 1998).

E dentro desta realidade de problemas psicológicos, pressão na infância pelos pais, e perseguição no meio acadêmico é onde Cantor desenvolve seus trabalhos, que viriam a impactar o estudo da matemática de seu século. Na próxima seção, veremos algumas de suas contribuições a respeito da teoria de conjuntos.

3. Trabalhos e contribuições

3.1. Enumerabilidade dos conjuntos

3.1.1. Infinito Enumerável

Um conjunto infinito em que seja possível estabelecer uma relação biunívoca com o conjunto dos números naturais é chamado de conjunto infinito enumerável. Um caso em que pode-se observar tal relação é o conjunto dos números inteiros. A relação pode ser observada na tabela a seguir:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...	2n-1	2n	...
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	...	-n	n	...

TABELA 1. relação bijetora entre os números naturais e números pares

Também é possível estabelecer uma relação bijetora dos números naturais com os números ímpares, pares, e com diversos outros conjuntos infinitos. Na seção a seguir, será mostrado o processo de Cantor para demonstrar a enumerabilidade dos números racionais.

3.1.2. Diagonalização dos números racionais

Através desse processo, pode-se estabelecer uma relação biunívoca do conjunto dos números naturais com o dos números racionais, sendo também possível classificar o segundo como um conjunto infinito enumerável.

A diagonalização dispõe os racionais de tal forma:

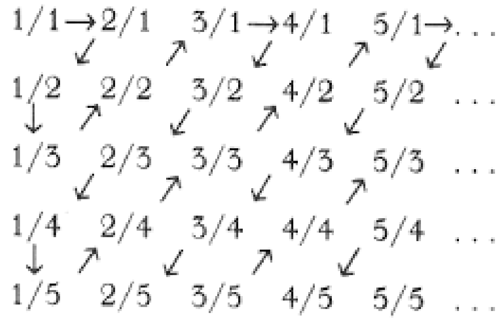

FIGURA 1. diagonalização dos números racionais. FONTE: BRITTO, S. V. dos S., 2016.

A partir desse método, fica evidente a enumerabilidade dos números racionais, sendo então a cardinalidade deste conjunto equivalente à cardinalidade do conjunto dos números naturais.

3.1.3. Não enumerabilidade do conjunto dos números reais

Cantor e Dedekind se dedicaram aos estudos do conjuntos dos números algébricos e transcendentais, e como seria a classificação desse conjunto com relação aos critérios de enumerabilidade. Como cita Santos (2008),

> Tanto Cantor como Dedekind estavam completamente cientes de que o conjunto dos números irracionais era mais complexo que o conjunto dos racionais, tanto no que diz respeito ao número de elementos, como no que concerne às propriedades desses elementos. Ainda assim, faltava-lhes uma demonstração direta de que o continuum encerrava um infinito maior que os outros conjuntos infinitos. (p.113)

Cantor partiu supondo, por absurdo, que o conjunto dos números reais - que contém todos os números racionais, algébricos e transcendentais - era enumerável. Sendo assim, o intervalo [0,1[também o seria, e assim seria possível listar todos os infinitos números desse intervalo, como a seguir:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \ldots$$
$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \ldots$$
$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \ldots$$

$$a_4 = 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \ldots$$

$$\vdots$$

Entretanto, Cantor fez algo surpreendente, "traçando" uma diagonal que passaria por toda a lista, criando um novo número real b_r em que

$$b_r = 0, b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55} \ldots ,$$

de forma que cada algarismo b_{ii} fosse diferente do algarismo original a_{ii}. Desta maneira, b_r não está contido nesta infinita lista de números reais, o que é um absurdo, pois como supôs-se que o intervalo era enumerável, a lista deveria ser completa. Logo, o conjunto não pode ser enumerável e, consequentemente, o mesmo deve ocorrer com os números reais.

3.2. Números transfinitos

A noção de números transfinitos é possível a partir da definição do infinito atual. Entende-se o infinito não apenas como uma sequência sem um último termo, mas como algo completo, como um conjunto definido. Pois, "A coleção {1, 2, 3, k} claramente não possui um maior elemento, no entanto é possível conceber um número limite ω , representando a coleção {1, 2, 3, k} em sua totalidade [...]." (SANTOS, 2008, p.119). O primeiro número transfinito é aquele declarado como maior que qualquer número natural, e foi nomeado inicialmente como ω (ômega). Na notação matemática:

$$\omega > n \,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cantor considerou também a existência de outros números transfinitos, sucessores de ω, sendo eles postos em ordem crescente

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, 2\omega, 2\omega + 1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Sendo os números naturais, inteiros e racionais conjuntos infinitos enumeráveis, e portanto, "menores", Cantor classificou-os como infinitos de primeira ordem, ou $\aleph_0$ (aleph zero), enquanto os números reais, por não terem a mesma cardinalidade que os naturais e afins, seriam considerados infinitos de segunda ordem, ou $\aleph_1$. Ele acreditava existirem infinitas ordens de *alephs*, mas ateve-se a estudar inicialmente os $\aleph_0$ e $\aleph_1$ (ACZEL, 2003).

3.2.1. Propriedades dos números transfinitos

A partir da análise dos transfinitos, Cantor expôs algumas de suas propriedades, como:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

Considerando que adicionar 1, ou qualquer outro número a $\aleph_0$, não alterará sua ordem, logo é válida a proposição

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 \quad ou \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

As operações de multiplicação também não alteram a ordem de um número transfinito, ou seja

$$\aleph_0 \times n = \aleph_0 \quad ou \quad \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

Então,

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \quad ou \quad \aleph_0^n = \aleph_0$$

No caso, essa situação se altera quando se trata da potenciação por outros $\aleph_n$, entrando assim no estudo da Hipótese do *Continuum*, como pode ser visto em Santos (2008, p.121-126).

Cantor viveu em um período e local onde havia um grande fomento das ciências matemáticas (a Alemanha teve grandes estudiosos como Riemann, Dedekind, Weiertrass e até mesmo seu opositor Kronecker), e suas contribuições não se resumem apenas às trazidas neste presente trabalho. Ainda há muito a ser explorado neste assunto, inclusive a possibilidade de um próximo estudo mais aprofundado a respeito do contexto histórico de Cantor e sua teoria.

4. Considerações finais

A partir da redação do presente trabalho, houve a possibilidade de um melhor entendimento de um momento histórico da matemática considerado importante por estudiosos, tanto pelo estudo da vida de Georg Cantor, como também pelo estudo do contexto matemático dos séculos XIX e XX, no qual ele está inserido. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, foi necessário aprofundar conhecimentos em áreas da própria matemática, bem como em história da matemática.

Cantor foi de extrema importância para a transformação do conceito de infinito potencial e para a utilização do infinito atual no meio matemático. Como relata o matemático Hilbert (1925), "[...] parece a mais admirável florescência do espírito matemático e mesmo uma das mais altas façanhas da atividade humana puramente intelectual", quando fala a respeito da teoria de conjuntos, em especial dos números transfinitos.

O desenvolvimento da pesquisa deparou-se com alguns obstáculos, como prazos pequenos para a imensa quantidade de conteúdo a ser estudado e trabalhado nesta pesquisa, assim como a falta de livros traduzidos para o português, além do pouco tempo disponível para o desenvolvimento da pesquisa. Apesar destas dificuldades, o trabalho foi finalizado, e tem chances de prosseguimento para outros que possuam abrangência e profundidade maiores sobre o infinito e sobre Cantor, objetos de pesquisa tão intrigantes e complexos.

5. Agradecimentos

Esta seção de agradecimentos será dedicada principalmente ao corpo docente do IFSP - Câmpus Bragança Paulista, parte tão importante e dedicada desta instituição. Sem o apoio de cada um, direta ou indiretamente, este trabalho não teria condições favoráveis para ser redigido.

Referências

ACZEL, A. D. **O mistério do Alef**: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. São Paulo: Globo, 2003.

BOYER, C. B.; MEZBACH, U. C. **História da matemática.** Tradução de Helena Castro, 3ª edição. São Paulo, Blucher, 2012.

BRITTO, S. V. dos S. **Contando o Infinito:** A Natureza Paradoxal da Infinidade. Santa Catarina, 2016. Disponível em: <https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1473907010_ARQUIVO_congressodehistoriadasciencias.pdf>. 12 abr. 2019, 10:37.

CANTOR, G. **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.** Nova York, Dover, 1955.

HILBERT, D. **Sobre o infinito.** Tradução de Marcelo Papini. Gottingen, 1925. Disponível em: <http://www.mat036.ufba.br/HILBERT2.PDF>. Último acesso em: 12 abr. 2019.

MARQUES, G. da C. **Introdução à teoria de conjuntos.** USP/Univesp. Disponível em <https://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_01.pdf>. Último acesso em: 06 abr. 2019, 22:35.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**. 1998. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html> Último acesso em: 04abr. 2019, 21:24.

SANTOS, E. E. dos. **O Infinito de Georg Cantor:** uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática. São Paulo, tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2008.

SENA, C. O. de R. **Uma história sobre o infinito atual.** Belo Horizonte, monografia de especialização, Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.