

ESTUDO DO DOMÍNIO E CURVATURA DA FAMÍLIA DE CURVAS OVAIS DE CASSINI

AMANDA CRISTINA MOTA IASSIA¹, DENIS RAFAEL NACBAR²

¹ Aluna do curso de Licenciatura em Matemática, IFSP, *campus* Bragança Paulista/SP, amanda.iassia@outlook.com.

² Professor do curso de Licenciatura em Matemática, IFSP, *campus* Bragança Paulista/SP, dnacbar@ifsp.edu.br.

RESUMO: O presente trabalho tem como objetivo estudar a família de curvas conhecidas como Ovais de Cassini. Essas curvas têm equação cartesiana dada por $(x^2 + y^2)^2 - 2f^2(x^2 - y^2) - f^4 = a^4$. Nesse trabalho foi estudada equação na forma cartesiana e paramétrica e os casos particulares a partir das diferentes relações estabelecidas entre os coeficientes a e f . Os resultados são obtidos ao analisar a condição de existência do domínio e os parâmetros que levam à curvatura máxima e mínima e, seus respectivos valores nesses pontos. Por fim, os resultados obtidos (construção da família de curvas, domínio e curvatura) são apresentados graficamente usando o sistema de computação algébrica Mathematica.

PALAVRAS-CHAVE: ovais de cassini, domínio, curvatura.

INTRODUÇÃO

O estudo dos astros sempre foi algo intrigante para os seres humanos, que constantemente estão na busca para compreender mais sobre o universo. Um dos estudiosos do assunto foi o alemão Johannes Kepler (1571-1630), que teve seu primeiro contato com a astronomia ainda criança quando sua mãe a levou para observar um cometa [5]. Kepler foi um dos estudiosos mais importantes para a revolução científica do século XVII, sendo o responsável por desenvolver pesquisas a respeito da descrição do movimento planetário [4, 8]. Em um de seus trabalhos mais relevantes o livro *Astronomia Nova*, 1609, Kepler apresenta fortes argumentos em defesa do heliocentrismo e a teoria nomeada primeira lei de Kepler que descreve a trajetória dos planetas em torno do Sol como elíptica. Contudo, a teoria de Kepler não foi completamente aceita. No ano de 1675, o astrônomo italiano Giovanni Domenico Cassini tentou mostrar que as órbitas dos planetas eram ovais [1, 3, 5].

Posteriormente, Sivadiéri explorou esta questão e concluiu que a diferença entre a elipse e a oval de Cassini é tão distinguível quanto à elipse e o círculo, portanto, se descartar o círculo em favor da elipse, então, deve-se também descartar a oval com o mesmo argumento [4, 6].

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar a curva Oval de Cassini e posteriormente analisar seus respectivos casos particulares e características como domínio e curvatura [2, 7].

DESCRIÇÃO E DISCUSSÃO

Com o objetivo de deduzir as equações paramétricas da família de curvas Ovais de Cassini, utiliza-se como princípio sua definição. Por definição a Oval de Cassini é o conjunto de pontos $P(x; y)$ pertencentes ao plano, tal que, o produto das distâncias de $P(x; y)$ a dois pontos fixos F e F' (focos), situados no mesmo plano seja constante, ou seja,

$$\overline{PF} \cdot \overline{PF'} = c. \quad (1)$$

Considere os pontos $F(f; 0)$ e $F'(-f; 0)$, uma constante c , tal que, $a = \sqrt{c}$, e um ponto $P(x; y)$ pertencente as curvas Ovais de Cassini. Logo, pela definição tem-se,

$$[(x - f)^2 + y^2][(x + f)^2 + y^2] = a^4, \quad (2)$$

o que equivale à equação cartesiana da curvas Ovais de Cassini centrada na origem,

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2f^2(x^2 - y^2) + f^4. \quad (3)$$

Fazendo a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = \rho \cos t \\ y(t) = \rho \sin t, \end{cases} \quad (4)$$

onde ρ representa a distância de $P(x; y)$ até a origem, e t o ângulo que P forma com o eixo polar, tem-se,

$$[\rho^2(\cos^2 t + \sin^2 t)]^2 - 2f^2(\rho^2 \cos^2 t - \rho^2 \sin^2 t) + f^4 = a^4 \quad (5)$$

$$\rho^4 - 2f^2 \rho^2 \cos(2t) + f^4 = a^4. \quad (6)$$

E por fim, a partir da equação polar obtém-se a equação paramétrica para a família de curvas Ovais de Cassini. Ao igualar a equação 6 a zero temos uma equação do segundo grau em função de ρ^2 . Portanto,

$$\rho = \sqrt{f^2 \cos(2t) \pm \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4}}, \quad (7)$$

ao substituir ρ na equação 4 resulta-se nas equações paramétricas para as Ovais de Cassini,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{f^2 \cos(2t) \pm \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4}} \cos t \\ y(t) &= \sqrt{f^2 \cos(2t) \pm \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4}} \sin t. \end{aligned} \quad (8)$$

A partir das equações paramétricas das curvas Ovais de Cassini, analisa-se o domínio da função para três diferentes relações estabelecidas entre os coeficientes a e f : $a > f$, $a < f$, e $a = f$.

Considerando $a/f > 1$, ou seja, $a > f$, obtém-se uma curva contínua e sem auto-intersecção, conforme observado na Figura 3. Se a razão entre os coeficientes a e f , respectivamente, estiver próxima a 1 o formato da curva se assemelha ao de um amendoim, Figura 3(a). À medida que a razão entre os coeficientes aumenta o formato da curva se aproxima ao de uma elipse, conforme a Figura 3(b).

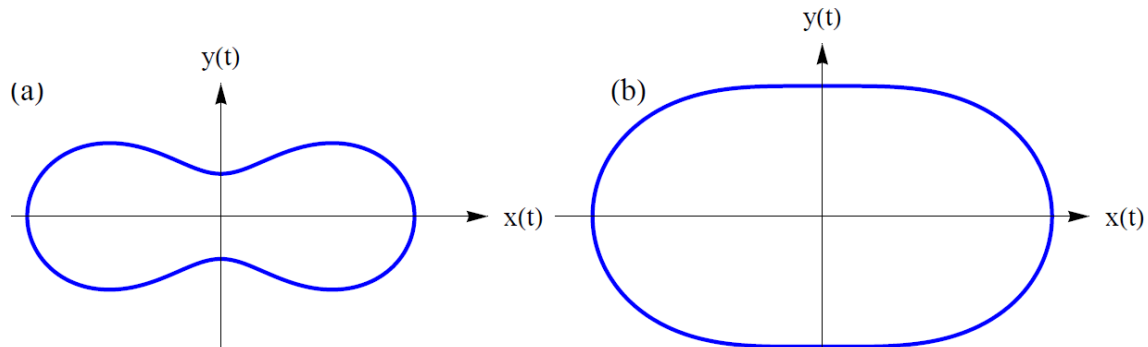


FIGURA 3: (a) Curva construída a partir dos coeficientes $a = 2,1$ e $f = 2$, a razão entre os coeficientes é 1,05. (b) Curva construída a partir dos coeficientes $a = 2,8$ e $f = 2$, a razão entre os coeficientes é 1,4.

Para estabelecer o domínio da função tendo como referência a equação (8), analisa-se primeiro a expressão que se encontra no radical interno, o qual deve assumir valores maiores ou iguais a zero. Logo,

$$f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4 \geq 0, \quad (9)$$

ou seja, t deve ser tal que

$$\sin^2(2t) \leq \frac{a^4}{f^4}. \quad (10)$$

Uma vez que $a > f$, todo t do domínio admite como verdadeira a Equação (10). Mais especificamente é possível restringir o radical interior a uma faixa de valores:

$$\sqrt{-f^4 + a^4} \leq \sqrt{-f^4 \sin^2(2t) + a^4} \leq \sqrt{a^4}, \quad (11)$$

o que pode ser observado na curva vermelha da Figura 4(a). A segunda condição para estabelecer o domínio das Ovais de Cassini é de que a expressão existente no radical externo seja maior ou igual a zero, ou seja,

$$f^2 \cos(2t) \pm \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4} \geq 0 \quad (12)$$

Cada parcela da Equação (12) está representada graficamente na Figura 4(a). Ao realizar a soma [subtração] entre as mesmas, como indica a Equação (12) tem-se como resultado a curva azul [vermelha] representada na Figura 4(b).

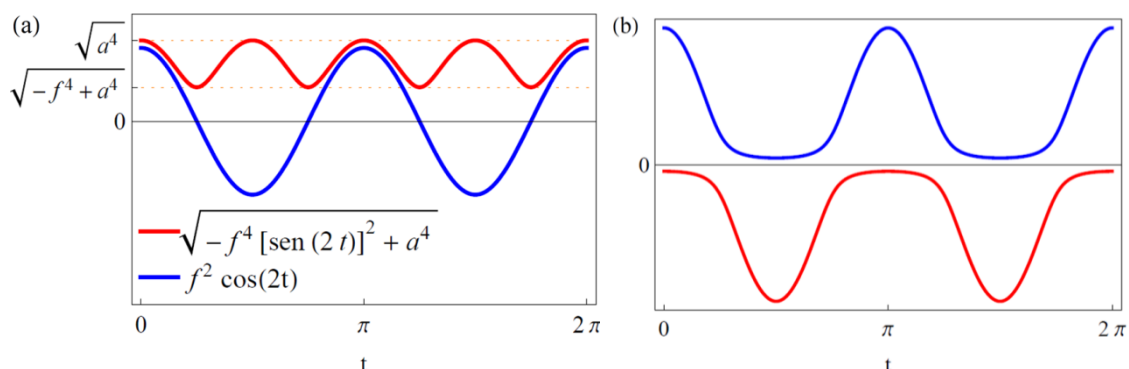


FIGURA 4: (a) Funções a serem operadas no radicando. (b) Resultado da adição (azul) e subtração (vermelho) entre as funções.

Conclui-se parcialmente que para o caso $a/f > 1$, as ovas de Cassini possuem domínio $t \in \mathbb{R}$, com t no intervalo $[0, 2\pi]$ sendo responsável por um ciclo completo na Oval. Além disso, as equações paramétricas da curva são

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{f^2 \cos(2t) + \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4}} \cos t, \\ y(t) &= \sqrt{f^2 \cos(2t) + \sqrt{f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4}} \sin t \end{aligned} \quad (13)$$

uma vez que para as equações correspondentes, mas com sinal negativo, não existe t real que leva a um radicando maior ou igual a zero, como observado na Figura 4(b).

A análise da curvatura da Oval de Cassini é feita graficamente usando a equação,

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (14)$$

Admitindo os coeficientes $a = 2,1$ e $f = 2$ tem-se a curvatura da Oval de Cassini em função do parâmetro t representada na Figura 5(a). A Figura 5(b) apresenta o mesmo resultado, mas com uma representação diferente. Em azul estão os pontos $(x(t), y(t), 0)$, ou seja, a Oval de Cassini. Enquanto que em vermelho estão os pontos $(x(t), y(t), k(t))$, ou seja, no eixo das cotas está representado a curvatura de cada ponto da oval de Cassini. Dessa forma, é possível determinar que os parâmetros que levam à curvatura máxima são $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ e a curvatura máxima, em módulo, é 1,27.

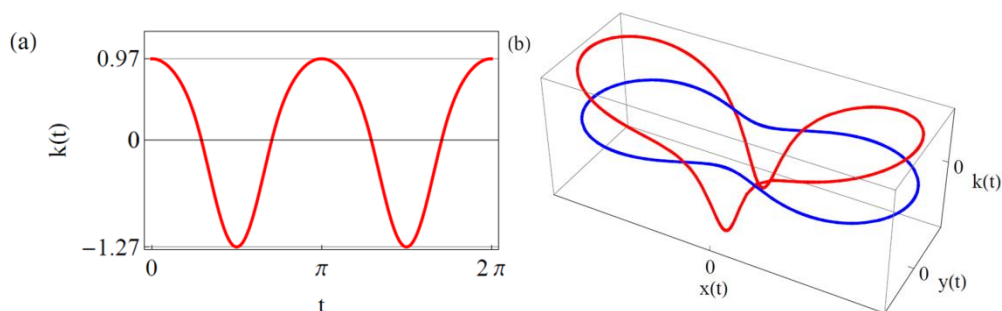


FIGURA 5: Curvatura máxima é $k(t) = |-1,27|$ sendo referente aos parâmetros $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$.

Considere agora a relação $a/f = 1$, ou seja, $a = f$. Esse caso particular das Ovas de Cassini resulta na curva conhecida como Leminiscata de Bernoulli, palavra que deriva do latim, lemniscus, e significa fita com laço. A mesma é contínua e possui uma auto-intersecção, como na Figura 6.

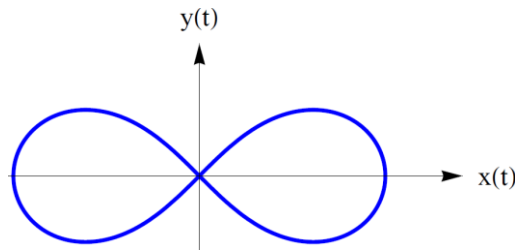


FIGURA 6: Lemniscata de Bernoulli.

De maneira análoga ao caso anterior, estuda-se o domínio da curva, mas a partir da nova relação estabelecida entre os coeficientes a e f . Seja $a = f$, a primeira condição de existência do domínio é de que a expressão do radical interno, $f^4 \cos^2(2t) - f^4 + a^4$, assumam valores maiores ou iguais a zero, e consequentemente,

$$|\sin(2t)| \leq 1, \quad (15)$$

logo, para a relação $a = f$, todo t do domínio admite como verdadeira a Equação (15). Portanto, é possível restringir o radical interno aos valores,

$$0 \leq -f^4 \sin^2(2t) + a^4 \leq a^4. \quad (16)$$

Esta condição pode ser observada na curva vermelha da Figura 7(a). A segunda premissa para determinar o domínio das Ovais de Cassini é de que a expressão do radical externo seja maior ou igual a zero, ou seja,

$$\sqrt{f^2 \cos^2(2t) \pm |f^2 \cos(2t)|} \geq 0. \quad (17)$$

Cada parcela da Equação (17) está representada graficamente na Figura 7(a). Ao realizar a soma [subtração] entre as mesmas, como determina a Equação (17) tem-se como resultado a curva azul [vermelha] representada na Figura 7(b).

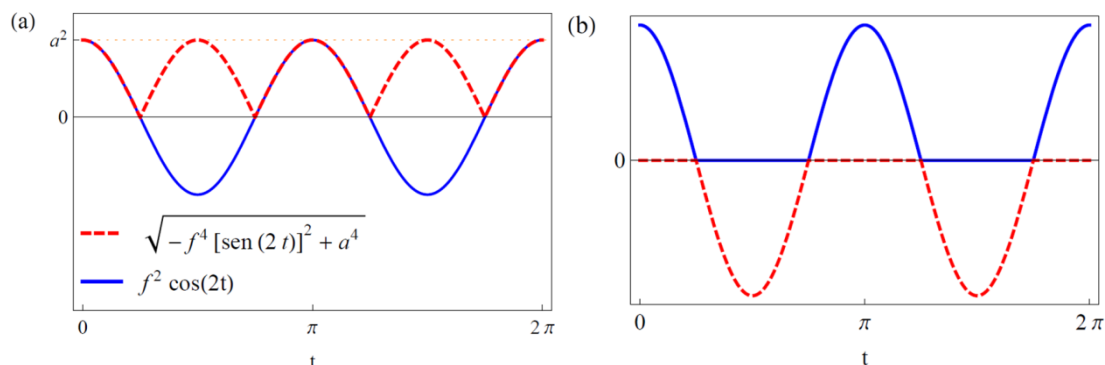


FIGURA 7: (a) Funções a serem operadas no radicando. (b) Resultado da adição (azul) e subtração (vermelha) entre as funções.

Portanto, para o caso $a = f$, se t pertence aos intervalos $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{7\pi}{4}; \frac{8\pi}{4}\right]$, as operações entre as parcelas da Equação (17) resultam em valores positivos, logo conclui-se que o domínio é parcialmente obtido pela condição,

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{4} + k\pi. \quad (18)$$

Além dos valores positivos, os parâmetros t para o quais as funções da Equação (17) se anulam também pertence à condição de existência do domínio das Ovais de Cassini, ou seja,

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + k\pi. \quad (19)$$

Portanto, conclui-se que as equações paramétricas das Ovais de Cassini para o caso $a = f$ mantém-se sendo da forma da Equação (13) e que o domínio das Ovais de Cassini é obtido pela combinação das Equações (18) e (19),

$$\begin{cases} \sqrt{2}f\sqrt{\cos(2t)}, & -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ 0, & \frac{\pi}{4} + k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + k\pi. \end{cases} \quad (20)$$

A análise da curvatura da Oval de Cassini é feita graficamente usando a Equação (14). Admitindo os coeficientes $a = 1$ e $f = 1$ tem-se a curvatura a Oval de Cassini em função do parâmetro t representada na Figura 8(a). A Figura 8(b) apresenta também a curvatura. Em azul estão os pontos $(x(t), y(t), 0)$, ou seja, a Oval de Cassini. Enquanto que em vermelho estão os pontos $(x(t), y(t), k(t))$, ou seja, no eixo das cotas está representado a curvatura de cada ponto da oval de Cassini. Dessa forma, é possível determinar que os parâmetros que levam à curvatura máxima são $t = 0, t = \pi$ e $t = 2\pi$, que correspondem à $k(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

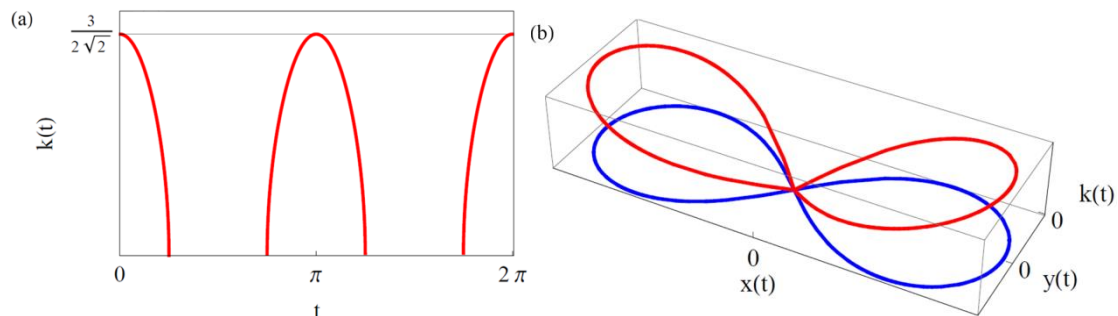


FIGURA 8: (a) Curvatura da Lemniscata de Bernoulli, $a = f$, o valor máximo de curvatura da curva é $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, em $t = 0, t = \pi$ e $t = 2\pi$. (b) Curva Lemniscata de Bernoulli (azul), e sua respectiva curvatura (vermelho).

A terceira e última relação estudada foi $a/f < 1$, ou seja, $a < f$, a qual resulta duas curvas contínuas, fechadas e desconexas. À medida que a razão entre os coeficientes aumenta, as ovas ficam maiores conforme a Figura 9(a).

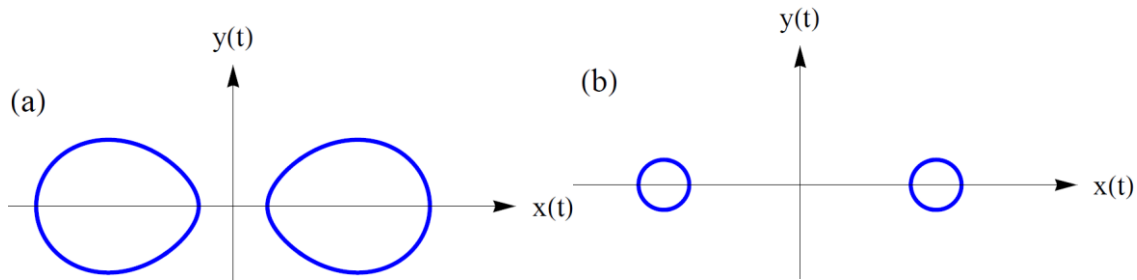


FIGURA 9: (a) Curva construída a partir dos coeficientes $a = 1,94$ e $f = 2$, a razão entre os coeficientes é 0,97 o que resulta nas curvas relativamente grandes. (b) Curva construída a partir dos coeficientes $a = 1,2$ e $f = 2$, a razão entre os coeficientes é 0,6.

De modo análogo aos casos anteriores estuda-se a condição de existência do domínio. A partir da Equação (8), analisa-se primeiro a expressão que se encontra no radical interno, a qual deve assumir valores maiores ou iguais a zero. Logo tem-se que,

$$-f^4 \sin^2(2t) + a^4 \geq 0. \quad (21)$$

A presente expressão oscila de valores negativos até a^4 , contudo devido à condição de existência os valores negativos serão desconsiderados. Deste modo, é possível restringir o radical interior à seguinte faixa de valores:

$$0 \leq -f^4 \sin^2(2t) + a^4 \leq a^4, \quad (22)$$

o qual pode ser observado na curva vermelha da Figura 9(a). A segunda condição para estabelecer o domínio das Ovais de Cassini é de que a expressão existente no radical externo seja maior ou igual a zero, logo,

$$f^2 \cos(2t) \pm \sqrt{-f^4 \sin^2(2t) + a^4} \geq 0. \quad (23)$$

Cada parcela da Equação (23) está representada graficamente na Figura 9(a). Ao realizar a soma [subtração] entre as mesmas, como indica a Equação (23) tem-se como resultado a curva azul [vermelho] representada na Figura 9(b).

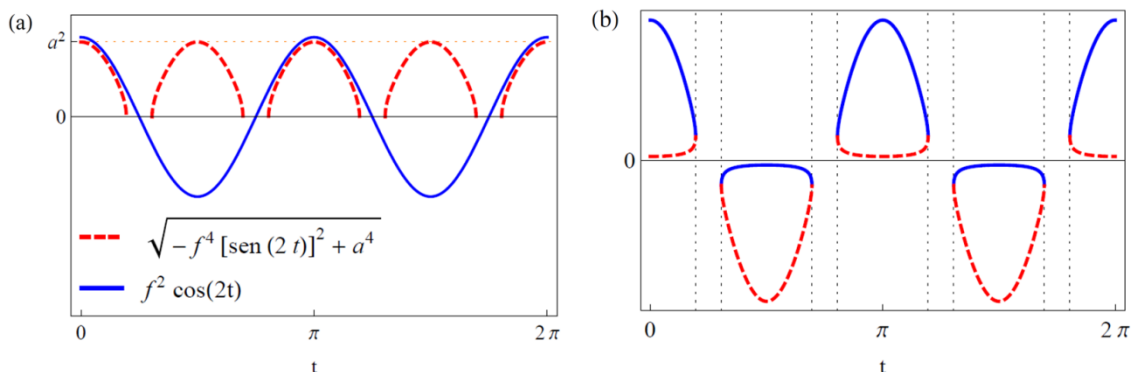


Figura 9:(a) Funções a serem operadas no radicando. (b) Resultado da adição (azul) e subtração (vermelho) entre as funções.

Conclui-se que para o caso $a/f < 1$, o domínio das Ovais de Cassini está definido para as duas operações existentes no radicando das equações paramétricas (8), entretanto, é

necessário avaliar os intervalos onde o parâmetro t está definido. A partir da Equação (21), obtém-se,

$$|\sin(2t)| \leq \frac{a^2}{f^2}, \quad (24)$$

o que implica,

$$k\pi + \arcsen\left(\frac{-a^2}{f^2}\right) \leq 2t \leq \arcsen\left(\frac{a^2}{f^2}\right) + k\pi. \quad (25)$$

Logo, o domínio das Ovais de Cassini para a condição $a < f$, está definido em,

$$\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{-a^2}{f^2}\right) + \frac{k\pi}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{a^2}{f^2}\right) + \frac{k\pi}{2}. \quad (26)$$

A análise da curvatura da Oval de Cassini é realizada graficamente utilizando a Equação (14). A mesma é calculada a partir dos coeficientes $a = 1,94$ e $f = 2$ e representada na Figura 10(a). A Figura 10(b) apresenta o mesmo resultado, porém com uma representação contendo o eixo das cotas, $k(t)$. Dessa forma analisa-se que os parâmetros $t = 0, t = \pi$ e $t = 2\pi$, levam a curvatura máxima, 1,12.

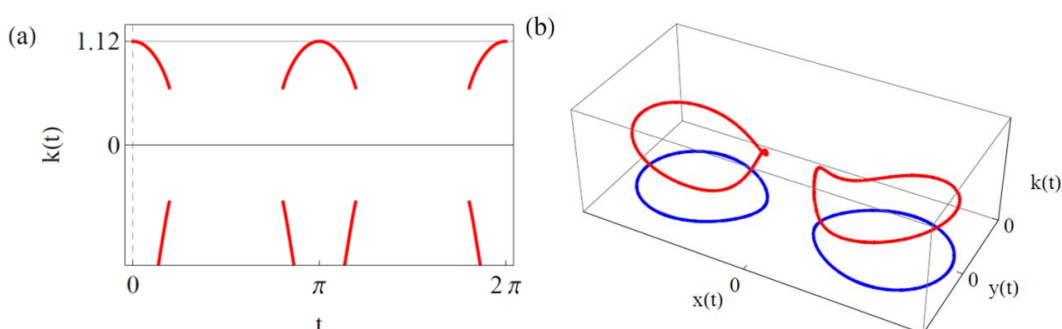


Figura 10: (a) Curvatura da curva Oval de Cassini, $a < f$, a curvatura máxima é $k(t) = 1,12$. (b) observa-se a curva Oval de Cassini (vermelho) em azul está representada sua respectiva curvatura.

O presente trabalho estudou a família de curvas Ovais de Cassini, ao estabelecer sua equação na forma cartesiana e paramétrica, analisar o domínio e curvatura máxima a partir das diferentes relações entre os coeficientes a e f , $a > f$, $a = f$ e $a < f$. Os resultados foram abordados graficamente, tanto as questões relativas ao domínio quanto as relativas à curvatura.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo pela concessão da bolsa de pesquisa para a realização deste projeto.

REFERÊNCIAS

- [1] COHEN I. B. Leibniz on elliptical orbits: as seen in his correspondence with the AcademieRoyale des Sciences in 1700 J. Hist. Med. AlliedSci. 17, 72–82, 1962.

- [2] IAVORSKI, A. **Cônicas e Curvas de Cassini**. Dissertação (Mestrado), 2014.
- [3] KEPLER J. **The New Astronomy** (Cambridge: Cambridge University Press), 1992.
- [4] MORGADO, B.; SOARES, V. **Kepler's ellipse, cassini's oval and the trajectory of planets**. *European Journal of Physics*, 2014.
- [5] ROCHA, J. M. **A descoberta da Teoria da Gravitação Universal: Uma análise desde Aristóteles**. 2015. 52 f. Monografia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- [6] SIVARDIERE J. Kepler ellipse or Cassini oval. *Eur. J. Phys.* 15, 62–64, 1994.
- [7] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo, Blucher, 2008.
- [8] TOSSATO, C. R; MARICONDA, P. R. O método da astronomia segundo Kepler. *Scientiæ Zudia*, São Paulo, n. 3, p. 33-66, 2010.